Kombinatorische Abzählverfahren

Vorwort

TEIL A: Basiswissen

Vorwort

Zielgruppen: Für wen ist dieses Material konzipiert?

Dieses Lernmaterial ist grundsätzlich für alle geeignet, die sich für Statistik interessieren.

Ganz besonders hilfreich ist es

- zum Selbststudium,
- zur Vorbereitung des Unterrichtes sowie
- zur Wiederholung des gelernten Stoffes.

Für Schüler, Studierende, Lehrer und mathematisch Interessierte ist das vorliegende Material gleichermaßen bestens geeignet.

Nutzen: Was bringt mir das?

Lernende können sich durch die präzise Darstellung schnell das gewünschte Wissen aneignen und anhand der Beispiele vertiefen.

Wiederholende finden schnell die relevanten Formeln sowie die notwendigen Voraussetzungen für ihre Anwendung. Zusätzliche Beispiele vertiefen den Lerneffekt.

Lehrer haben effizientes Lehrmaterial für die Schüler zur Verfügung. Ausgewählte Beispiele zu den jeweiligen Themen ergänzen den Unterricht und können als Übungen oder Hausaufgaben eingesetzt werden.

Inhalt und Aufbau des Lernmaterials

Dieses Lernmaterial erklärt die ´Kombinatorischen Abzählverfahren´. Es werden die entsprechenden Formeln und Voraussetzungen benannt sowie passende Beispiele zur Vertiefung des Stoffes erläutert.

Teil A: ´Kombinatorische Abzählverfahren´ - Basiswissen
Teil B: ´Kombinatorische Abzählverfahren´ - Aufgaben
Teil C: ´Kombinatorische Abzählverfahren´ - Komplettlösungen zu den Aufgaben

Kombinatorische Abzählverfahren

1. Was zum Teufel ist das?

Kombinatorische Abzählverfahren ermöglichen die Berechnung der Anzahl von Möglichkeiten, die sonst nur durch sehr, sehr große Abzähldiagramme dargestellt werden könnten.

Vorteil: Sie vereinfachen die Berechnung der „Anzahl der möglichen Ergebnisse". Vereinfachen ist gut, deshalb sollten alle Interessierten hier unbedingt weiterlesen...

1.2. Wofür benötigt man ´Kombinatorische Abzählverfahren´?

Wie bereits bekannt, wird die Laplace-Wahrscheinlichkeit nach der Formel

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Tja, und nun benötigt man die ´Anzahl der möglichen Ergebnisse´. Dies kann manchmal recht einfach sein, meist trifft dies aber leider nicht zu. Aus diesem Gunde nutzt man die ´Kombinatorische Abzählverfahren´.

1.3. Welche ´Kombinatorischen Abzählverfahren´ gibt es?

Produktregel	$A = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$		
Permutation	$A = N!$	und	$A = \frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$
Variation	$A = \frac{N!}{(N-k)!}$	und	$A = N^k$
Kombination	$A = \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!}$	und	$A = \frac{(N+k-1)!}{(N-1)! \cdot k!}$

Das einfachste Verfahren ist die Produktregel. Deshalb wird diese auch zuerst erklärt.
Auf den nachfolgenden Seiten werden dann Permutation, Variation und Kombinationen erläutert. Zum leichteren Verstehen ist allen Erläuterungen gleich ein Beispiel zugeordnet, sodass man sofort die Anwendbarkeit nachvollziehen kann.
Abschließend werden die Analogien zu den Urnen-Modellen beschrieben.

Viele Beispiele in unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen vervollständigen dieses Lernmaterial und tragen zum Verständnis der einzelnen Sachgebiete bei.

2. Produktregel – das einfachste Verfahren

Die Produktregel errechnet alle möglichen Anordnungen von n Elementen in k Teilmengen.

Anders ausgedrückt: Wie viele Möglichkeiten gibt es, alle Elemente aus allen Teilmengen miteinander zu kombinieren?

Hört sich kompliziert an, ist aber ganz einfach.

Produktregel

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente (n) der Teilmengen (k) unterscheiden sich voneinander.
2) Es müssen alle Elemente jeder Teilmenge ausgewählt werden.
3) Jedes Element darf nur 1x ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: $A = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$

Beispiel: Auto-Ausstattung

Ein Hersteller bietet folgende Ausstattungsmerkmale an:
Leistung: 50 kW, 70 kW und 90 kW
Farben: weiß, blau, rot, schwarz
Reifen: Sommerreifen, Winterreifen, Allwetterreifen
Wie viele unterschiedliche Ausstattungen kann der Hersteller anbieten?

1.Merkmal (Leistung): n = 3
2.Merkmal (Farben): n = 4
3. Merkmal (Reifen): n = 3

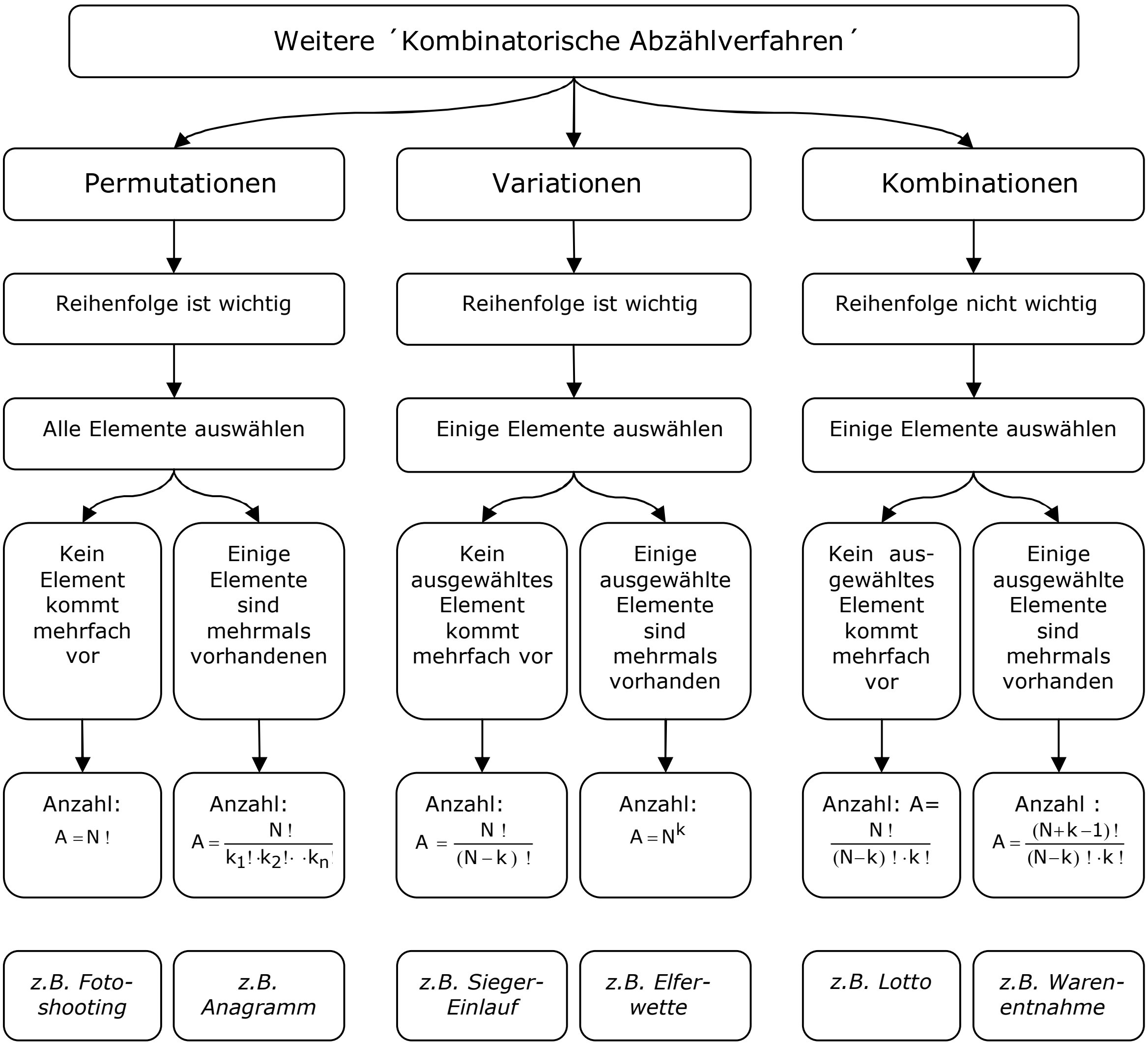
$A = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ (A = Anzahl aller Möglichkeiten)

$A = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ A = 36

Antwort: Es gibt 36 Ausstattungen.

3. Schneller Überblick: Permutation, Variation und Kombination:

Das nachfolgende Diagramm zeigt die Unterschiede der Verfahren ... aber keine Angst, auf den nächsten Seiten wird alles wird langsam und verständlich mit vielen Beispielen erklärt!



A = Anzahl der berechneten Möglichkeiten (Anordnungen).
N = Gesamtanzahl der Startelemente
K = Anzahl der entnommenen (ausgewählten) Elemente

4. Permutationen – die Starterklasse

Permutationen sind alle möglichen Anordnungen (Reihenfolgen) von N Elementen, in der alle Elemente verwendet werden.

Anders ausgedrückt: Wie viele Möglichkeiten gibt es, alle Elemente der Ausgangsmenge in einer einzigartigen Reihenfolge anzuordnen?

Es wird zwischen 2 Anordnungen unterschieden:
a) Die Elemente dürfen sich **nicht** wiederholen.
b) Die Elemente dürfen sich wiederholen.

Jetzt aufgepasst, es wird ernst!

a) Permutationen ohne Wiederholung

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente (N) der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
2) Es müssen alle Elemente der Ausgangsmenge ausgewählt werden.
3) Jedes Element darf nur 1x ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: A = N !

Beispiel: Foto-Shooting

3 Mädels posieren für ein Foto-Shooting. Wie viele unterschiedliche Fotos entstehen, wenn jedes Mal die Plätze getauscht werden?

Hinweise zur Auswahl:

1) Reihenfolge ist wichtig - es soll ja jedes Bild eine andere Anordnung zeigen.
2) Alle Elemente auswählen – jedes Mädel möchte auf jedem Bild sein.
3) Kein Element kommt mehrfach vor – jedes Mädel ist einzigartig.

Diese Auswahlkriterien im Diagramm verfolgen!

N = 3 (Anzahl aller Elemente)
A = N ! (A = Anzahl aller Fotos = Anzahl aller Möglichkeiten)

$A = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ A = 6

Antwort: Es entstehen 6 unterschiedliche Fotos.

Kontrolle: Annabelle Beatrice Caroline
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

5. Kombinationen – die Königsklasse

Kombinationen sind alle möglichen Anordnungen von Teilmengen ohne Beachtung der Reihenfolgen.

Anders ausgedrückt: Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Elemente der ausgewählten Teilmenge darzustellen?

Es wird zwischen 2 Anordnungen unterschieden:
a) Die ausgewählten Elemente dürfen sich **nicht** wiederholen.
b) Die ausgewählten Elemente dürfen sich wiederholen.

a) Kombinationen ohne Wiederholung

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente der Ausgangsmenge (N) unterscheiden sich voneinander.
2) Es dürfen nur Teilmengen (k = Anzahl der Elemente) ausgewählt werden.
3) Jedes Element darf nur 1x ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: $A = \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!}$

Siehe auch Binomialkoeffizient (Punkt 12).

Beispiel: Lotto 6 aus 49

Von 49 Kugeln werden 6 Kugeln gezogen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 6 Kugeln zu ziehen. (Die Reihenfolge der Kugeln ist egal.)

Hinweise zur Auswahl:

1) Reihenfolge ist nicht wichtig.
2) Es werden 6 Elemente (Teilmenge) ausgewählt..
3) Kein Element kommt mehrfach vor – jede Kugel kann nur 1x ausgewählt werden.

Diese Auswahlkriterien im Diagramm verfolgen!

N = 49 (Anzahl aller Elemente)
k = 6 (Anzahl Elemente der Teilmenge)

$$A = \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!}$$

$$A = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!}$$ A = 13.983.816

Antwort: Ca. 14 Millionen Möglichkeiten gibt es, diese 6 Kugeln zu ziehen.

12. Binomialkoeffizent – das Zauberwort für Kombinationen

Mit dem Binomialkoeffzienten lassen sich mögliche Anordnungen in der Kombinatorik sehr leicht berechnen.

$A = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$	Binomialkoeffizient (sprich: n über k)

Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele unterschiedliche Arten man eine Teilmenge (k Elemente) aus der Gesamtmenge (n) auswählen kann.

Übertragen auf das Urnenmodell:
Ziehen ohne Zurücklegen, Ergebnismenge ohne Beachtung der Reihenfolge.

Siehe auch Kombinationen ohne Wiederholung (Punkt 5).

Beispiel: Lotto 6 aus 49

Von 49 Kugeln werden 6 Kugeln gezogen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 6 Kugeln zu ziehen. (Die Reihenfolge der Kugeln ist egal.)

Hinweise zur Auswahl:

1) Reihenfolge ist nicht wichtig.
2) Es werden 6 Elemente (Teilmenge) ausgewählt..
3) Kein Element kommt mehrfach vor – jede Kugel kann nur 1x ausgewählt werden.

Diese Auswahlkriterien im Diagramm verfolgen!

N = 49 (Anzahl aller Elemente)
k= 6 (Anzahl Elemente der Teilmenge)

$$A = \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!}$$

$$A = \frac{49\,!}{(49-6)\,! \cdot 6!}$$ A = 13.983.816

Antwort: Ca. 14 Millionen Möglichkeiten gibt es, diese 6 Kugeln zu ziehen.

