Die Tulpenzwiebel-Aufgabe

- ein typisches Beispiel in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Formel zur Lösung dieser Aufgabe ist in jeder Formelsammlung für die Schule (Stichwort: hypergeometrische Verteilung) zu finden.

Aufgabenstellung

Ein Gärtner hat eine Tüte mit Tulpenzwiebeln geschenkt bekommen. Leider weiß er nur, dass in der in der Tüte 8 rote und 5 gelbe Tulpen enthalten sind. Er entnimmt 4 Tulpenzwiebeln und pflanzt sie ein.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau 2 rote und 2 gelb blühende Tulpen?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau 4 rot blühende Tulpen?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit blühen mindestens 3 Tulpen gelb?

Lösungsformel

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

M, N, n und k sind natürliche Zahlen.

P ist die Wahrscheinlichkeit und eine positive reelle Zahl ($0\leq P\leq 1$)

In diesem Beispiel:
N = Gesamtanzahl der Tulpenzwiebeln
n = Anzahl der entnommenen Tulpenzwiebeln
M = Gesamtanzahl der rot blühenden Tulpenzwiebeln
k = Anzahl der rot blühenden Tulpenzwiebeln

Lösung zu a)
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau 2 rote und 2 gelb blühende Tulpen?

geg.: N = 13 n = 4 M = 8 k = 2

ges.: $$P(X=2)=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{13-8}{4-2}}{\binom{13}{4}}=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{13}{4}}=\frac{28\cdot 10}{715}=0{,}3916=39{,}16\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, **genau** 2 rot blühende Tulpenzwiebeln zu entnehmen, beträgt 39,16%.

Hinweis: Wenn er 4 Tulpenzwiebeln entnimmt und **genau** 2 rot blühende Tulpen hat, dann blühen die anderen beiden Tulpen gelb.

Lösung zu b)
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau 4 rot blühende Tulpen?

geg.: N = 13 n = 4 M = 8 k = 4

ges.: $$P(X=4)=\frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{13-8}{4-4}}{\binom{13}{4}} = \frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{13}{4}} = \frac{70\cdot 1}{715} = 0{,}0979 = 9{,}79\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, **genau** 4 rot blühende Tulpenzwiebeln zu entnehmen, beträgt 9,79%.

Lösung zu c)
Mit welcher Wahrscheinlichkeit blühen **mindestens** 3 Tulpen gelb?

(Mindestens 3 gelb blühende Tulpenzwiebeln, d.h. es können 3 oder 4 der entnommenen Tulpenzwiebeln gelb blühen!)

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass **mindestens** 3 Zwiebeln gelb blühen, muss folgendes berechnet werden:
1) Wahrscheinlichkeit P_1 = 3 gelb blühende Zwiebeln und
2) Wahrscheinlichkeit P_2 = 4 gelb blühende Zwiebeln.

ges.: Gesamtwahrscheinlichkeit $P(3 \le X \le 4) = P_1 + P_2$

M = 5 d.h. 5 gelb blühende Tulpenzwiebeln sind vorhanden.
k = 3 d.h. genau 3 gelb blühenden Tulpenzwiebeln (zu 1)
k = 4 d.h. genau 4 gelb blühenden Tulpenzwiebeln (zu 2)

1) geg.: N = 13 n = 4 M = 5 **k = 3**

ges.: $$P_1(X=3)=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{13-5}{4-3}}{\binom{13}{4}} = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{13}{4}} = \frac{10\cdot 8}{715} = 0{,}1119 \qquad \mathbf{P_1 = 0{,}1119}$$

2) geg.: N = 13 n = 4 M = 5 **k = 4**

ges.: $$P_2(X=4)=\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{13-5}{4-4}}{\binom{13}{4}} = \frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{8}{0}}{\binom{13}{4}} = \frac{5\cdot 1}{715} = 0{,}0070 \qquad \mathbf{P_2 = 0{,}0070}$$

$P(3 \le X \le 4) = P_1 + P_2 = 0{,}1119 + 0{,}0070 = 0{,}1189 = 11{,}89\%$

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 3 gelb blühende Tulpenzwiebeln zu entnehmen, beträgt 11,89%.

Stichworte zum Lösen dieser Aufgabe:
Laplace-Experiment, Fakultät, Gleichverteilung, Binomialkoeffizient, Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, Summenregel, diskrete Zufallsgröße, hypergeometrische Verteilung